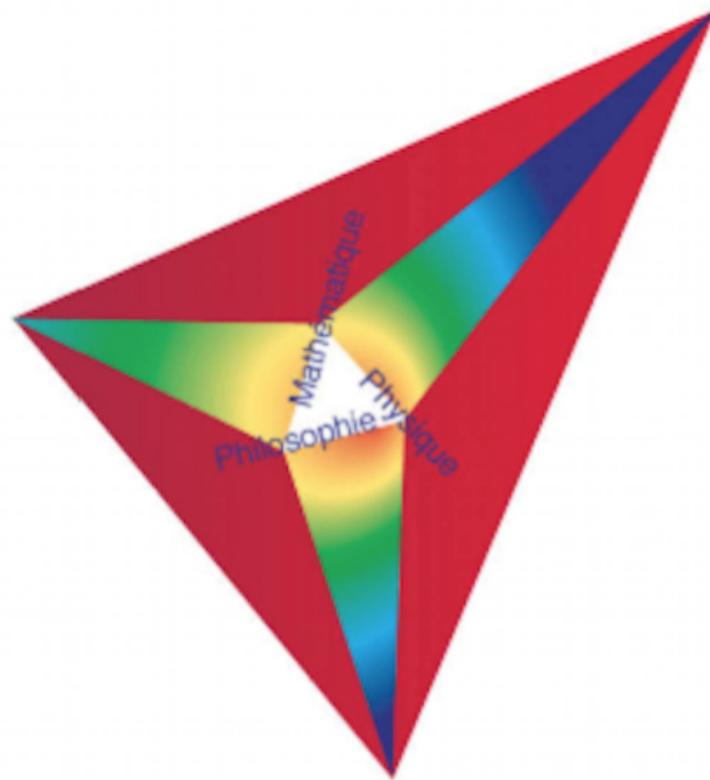


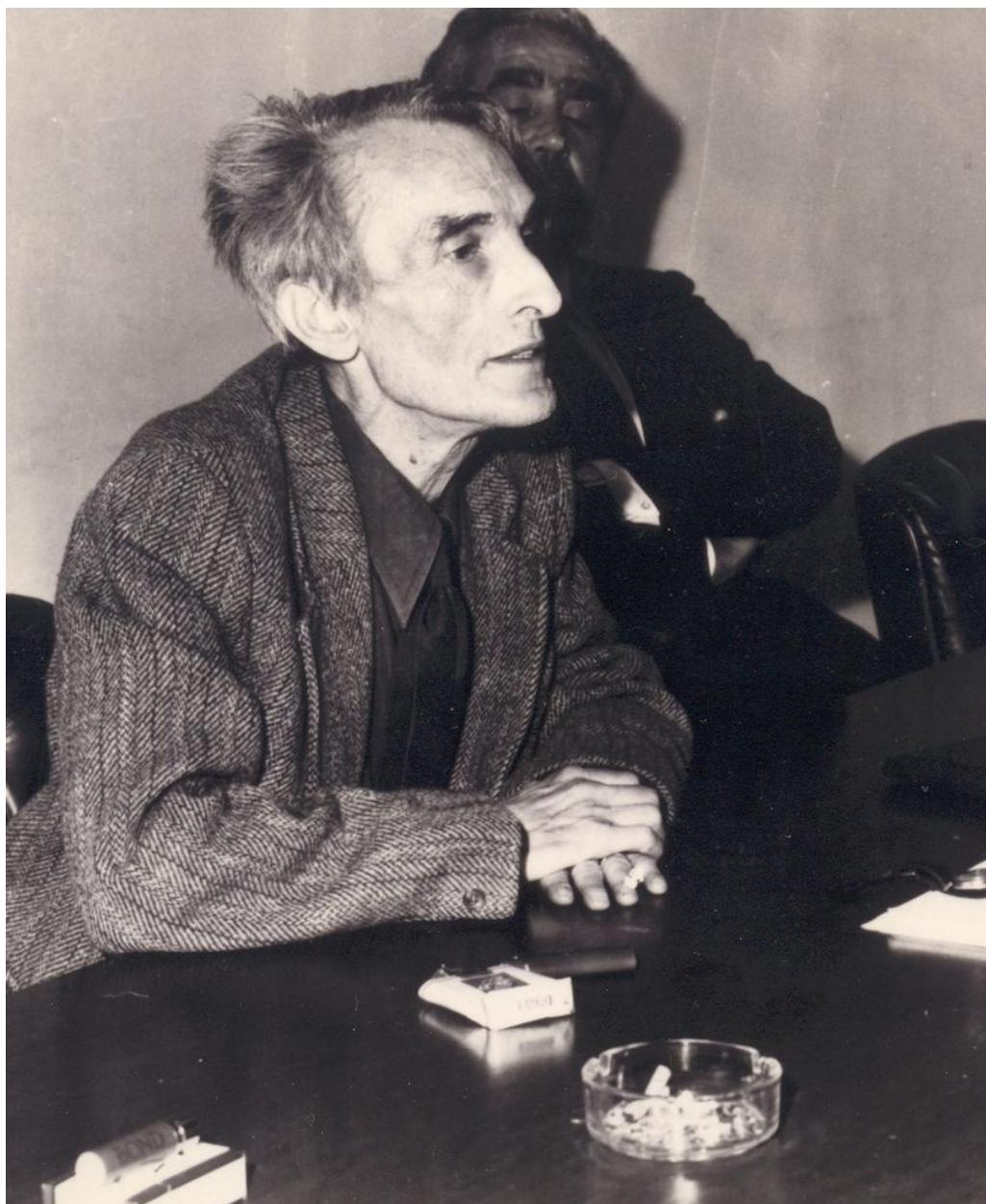
Le monde de la caractéristique 1

A. Connes

(En collaboration avec C. Consani)

TRIANGLE DE PENSÉES





Riemann

$$f(x) := \sum \frac{1}{n} \pi(x^{\frac{1}{n}}), \quad \pi(x) := \#\{p \mid p \in \mathcal{P}, p < x\} \quad (+\frac{1}{2})$$

$$\text{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t}$$

$$f(x) = \text{Li}(x) - \sum_{\rho} \text{Li}(x^{\rho}) + \int_x^{\infty} \frac{1}{t^2 - 1} \frac{dt}{t \log t} - \log 2$$

ρ zéros non-triviaux ρ de $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$

Stratégie RR et caractéristique 1

- ▶ Formule de Hasse-Weil pour $q \rightarrow 1$.
- ▶ Site arithmétique et géométrie en caractéristique 1.
- ▶ Extension des scalaires à \mathbb{R}_+^{\max} .
- ▶ Formule de Riemann-Roch et algèbre homologique en caractéristique 1.

Formule de Hasse-Weil pour $q \rightarrow 1$

$N(q)$ donnée pour $q \in [1, \infty)$

$$Z(q, T) = \exp \left(\sum_{r \geq 1} N(q^r) T^r / r \right)$$

$$\zeta_N(s) = \lim_{q \rightarrow 1} (q - 1)^\chi Z(q, q^{-s}), \quad \chi = N(1)$$

Lemme :

$$\frac{\partial_s \zeta_N(s)}{\zeta_N(s)} = - \int_1^\infty N(u) u^{-s} d^* u$$

Théorème :

Il existe une unique distribution $N(u)$ telle que la fonction ζ_N associée par

$$\frac{\partial_s \zeta_N(s)}{\zeta_N(s)} = - \int_1^\infty N(u) u^{-s} d^*u$$

vérifie

$$\zeta_N(s) = \zeta_{\mathbb{Q}}(s) := \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s), \quad s \in \mathbb{C}$$

Formules explicites

Fonction $F(u)$ définie pour $u \in [1, \infty)$, continue et continument différentiable sauf pour un nombre fini de points et $\exists \epsilon > 0$, $F(u) = O(u^{-1/2-\epsilon})$.

$$\Phi(s) = \int_1^{\infty} F(u) u^{s-1} du$$

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{1}{2}\right) + \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) - \sum_{\rho \in \text{Zeros}} \Phi\left(\rho - \frac{1}{2}\right) &= \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \log p p^{-m/2} F(p^m) + \\ &+ \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\log \pi}{2}\right) F(1) + \int_1^{\infty} \frac{t^{3/2} F(t) - F(1)}{t(t^2 - 1)} dt \end{aligned}$$

Théorème

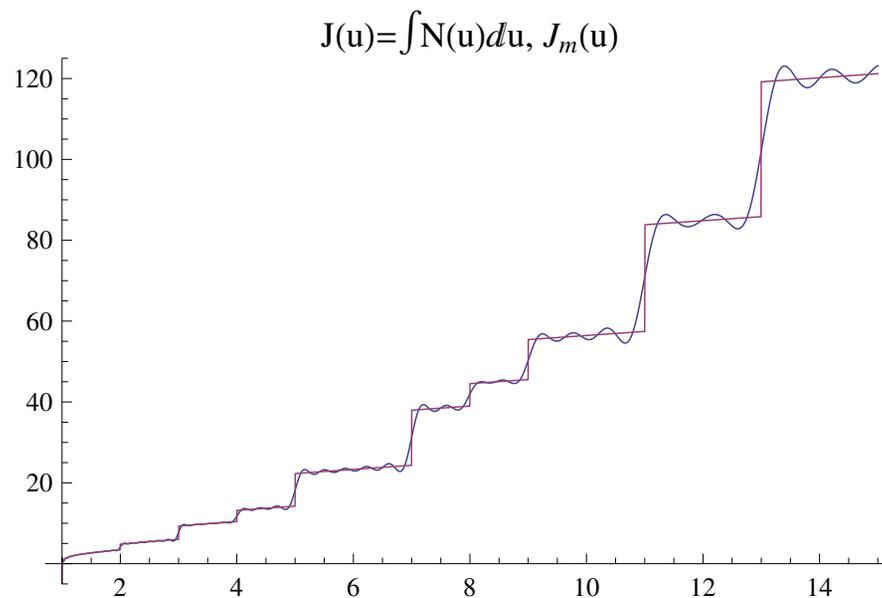
(1) La distribution $N(u)$ vérifie

$$N(u) = u - \frac{d}{du} \left(\sum_{\rho \in Z} \text{order}(\rho) \frac{u^{\rho+1}}{\rho+1} \right) + 1$$

où Z est l'ensemble des zéros non-triviaux de la fonction zêta et la dérivée est prise au sens des *distributions*.

(2) La distribution $N(u)$ est positive pour $u > 1$.

(3) La valeur $N(1)$ est égale à $-\infty$ et reproduit la répartition des zéros en $E \log E$.



Primitive de $N(u)$ et approximation par

$$J_m(u) = \frac{u^2}{2} - \sum_{Z_m} \text{order}(\rho) \frac{u^{\rho+1}}{\rho+1} + u$$

$J(u)$ change de signe pour $u \sim 1.0050692$

Espace des classes d'adèles $\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$

L'espace des classes d'adèles donne une interprétation des formules explicites de Riemann-Weil comme formule de trace. Les zéros des fonctions L apparaissent comme spectre d'absorption et les termes

$$\sum_v \int'_{\mathbb{K}_v^*} \frac{h(w^{-1})}{|1-w|} d^*w$$

proviennent de l'action de l'isotropie sur l'espace transverse aux orbites périodiques

$$(T \xi)(x) = \int k(x, y) \xi(y) dy$$

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{distr}}(T) = \int k(x, x) dx .$$

$$T\xi(x) = \xi(\lambda x), k(x, y) = \delta(\lambda x - y)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{\mathrm{distr}}(T) &= \int k(x, x) dx = \int \delta(\lambda x - x) dx \\ &= \frac{1}{|\lambda - 1|} \int \delta(z) dz = \frac{1}{|\lambda - 1|} \end{aligned}$$

Action $\vartheta_w \xi(x) = \xi(w^{-1}x)$ du groupe des classes d'idèles
 $G = \mathrm{GL}_1(\mathbb{A})/\mathrm{GL}_1(\mathbb{Q})$ sur $\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_\mathbb{Q}$

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{distr}} \left(\int h(w) \vartheta(w) d^*w \right) = \sum_v \int_{\mathbb{Q}_v^*} \frac{h(w^{-1})}{|1 - w|} d^*w.$$

\Rightarrow distribution $N(u)$

Elle est obtenue en se restreignant aux fonctions test invariantes par $\hat{\mathbb{Z}}^*$ ce qui correspond au double quotient $\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} / \hat{\mathbb{Z}}^*$. On pose $h(u) = g(|u|)$ à support dans $[1, \infty)$.

Place archimédienne

$$\int'_{\mathbb{Q}_\infty^*} \frac{h(w^{-1})}{|1-w|} d^*w = \int'_{\mathbb{R}^*} \frac{g(|u|)}{|1-u^{-1}|} d^*u$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{|1-u^{-1}|} + \frac{1}{|1+u^{-1}|} \right) = \frac{u^2}{u^2-1}, \quad \forall u > 1.$$

Places finies

Pour les places finies on a $|1 - w| = 1$, car $|w| < 1$ donc pour tout nombre premier p on a

$$\int'_{\mathbb{Q}_p^*} \frac{h(w^{-1})}{|1 - w|} d^*w = \int'_{\mathbb{Q}_p^*} g(|u|) d^*u = \sum_{m=1}^{\infty} \log p g(p^m).$$

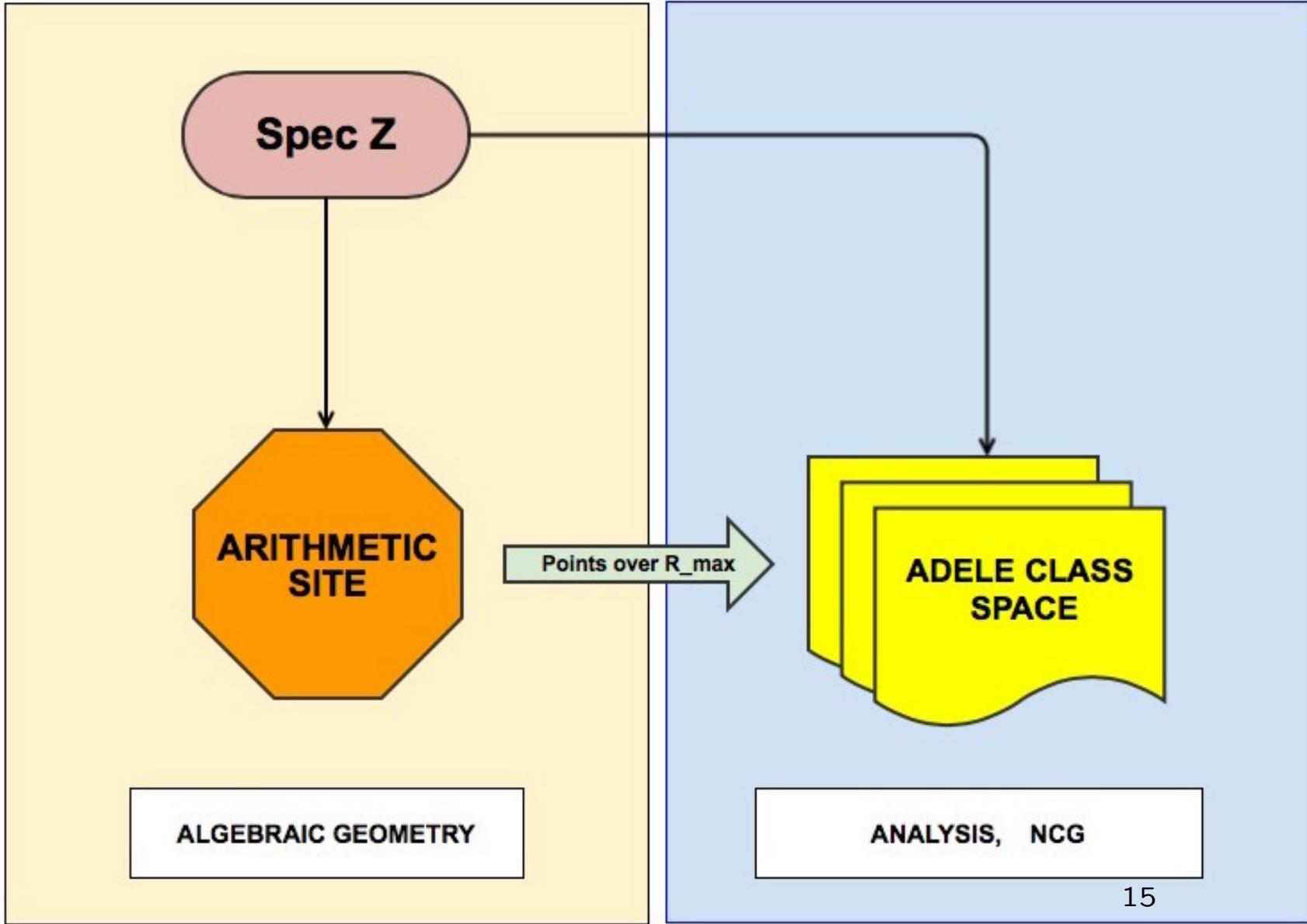
Pour obtenir $N(q)$ on prend $g_q(u) = u\delta_q(u)$. C'est une distribution, qui évaluée sur une fonction test $b(u)$ donne

$$\int b(u)g_q(u)d^*u = b(q), \quad \int g_q(u)\vartheta_u d^*u = \vartheta_q$$

Géométrie

Quelle géométrie pour l'espace des classes d'adèles : **topos + caractéristique 1**

- Le site arithmétique.
- Les correspondances de Frobenius.
- Extension des scalaires à \mathbb{R}_+^{\max} .



Pourquoi les semi-anneaux ?

Une catégorie \mathcal{C} est *semiadditive* si elle a des produits et coproduits finis, le morphisme $0 \rightarrow 1$ est un isomorphisme (donc \mathcal{C} a un objet 0), et les morphismes canoniques

$$\gamma_{M,N} : M \vee N \rightarrow M \times N$$

sont des isomorphismes.

Semicorps finis

Théorème

Soit \mathbb{K} un semicorps fini, alors ou bien \mathbb{K} est un corps
ou bien $\mathbb{K} = \mathbb{B}$,

$$\mathbb{B} := \{0, 1\}, \quad 1 + 1 = 1.$$

Le semicorps \mathbb{F}

Seul semicorps infini dont le groupe multiplicatif est cyclique : $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_{\max} := (\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \max, +)$, semicorps des entiers **tropicaux** : on le note multiplicativement : L'addition \vee est donnée par $u^n \vee u^m = u^k$, avec $k = \sup(n, m)$. La multiplication est inchangée : $u^n u^m = u^{n+m}$. Il est de caractéristique 1 : $1 + 1 = 1$.

Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^\times$ on a un endomorphisme $\text{Fr}_n \in \text{End}(\mathbb{F})$ donné par $\text{Fr}_n(x) := x^n \forall x \in \mathbb{F}$.

Lemme : L'application $\mathbb{N}^\times \rightarrow \text{End}(\mathbb{F})$, $n \mapsto \text{Fr}_n$ est un isomorphisme de semi-groupes.

Le Site Arithmétique $(\widehat{\mathbb{N}^\times}, \mathbb{Z}_{\max})$

Soit $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_{\max} := (\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ sur lequel \mathbb{N}^\times agit par $n \mapsto \text{Fr}_n$. Muni de cette structure $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_{\max}$ est un semi-anneau dans le topos $\widehat{\mathbb{N}^\times}$.

Le *site arithmétique* $(\widehat{\mathbb{N}^\times}, \mathbb{Z}_{\max})$ est le topos $\widehat{\mathbb{N}^\times}$ muni du *faisceau structural* : $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_{\max}$ vu comme semi-anneau dans le topos.

Caractéristique 1

Le rôle de \mathbb{F}_q est joué par

$$\mathbb{B} := \{0, 1\}, \quad 1 + 1 = 1$$

Ce semicorps n'a pas d'extension finie mais

$\text{Fr}_\lambda(x) = x^\lambda$ définit un automorphisme de \mathbb{R}_+^{\max} .

$$\text{Gal}_{\mathbb{B}}(\mathbb{R}_+^{\max}) = \mathbb{R}_+^\times$$

Points du site arithmétique

sur \mathbb{R}_+^{\max}

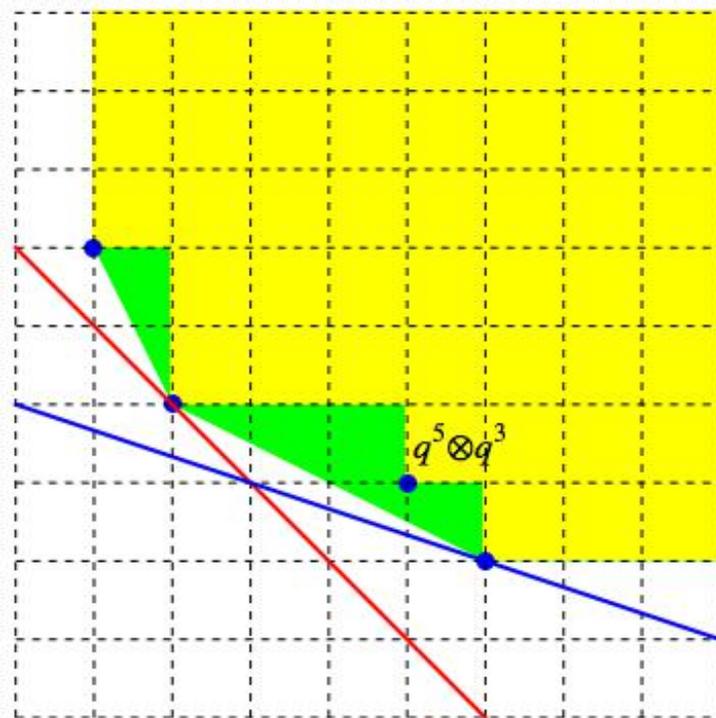
Un point de $(\widehat{\mathbb{N}^\times}, \mathbb{Z}_{\max})$ défini sur \mathbb{R}_+^{\max} est donné par un couple $(p, f_p^\#)$ d'un point p de $\widehat{\mathbb{N}^\times}$ et d'un morphisme local $f_p^\#$ de semi-anneaux de la fibre \mathcal{O}_p en p du faisceau structural vers \mathbb{R}_+^{\max} .

Théorème

Les points du site arithmétique $(\widehat{\mathbb{N}^\times}, \mathbb{Z}_{\max})$ sur \mathbb{R}_+^{\max} forment le quotient de l'espace des classes d'adèles de \mathbb{Q} par l'action de $\widehat{\mathbb{Z}}^*$. L'action des automorphismes de Frobenius Fr_λ de \mathbb{R}_+^{\max} correspond à l'action du groupe des classes d'idèles.

C courbe définie sur \mathbb{F}_q	Site Arithmétique $\mathcal{A} = (\widehat{\mathbb{N}^\times}, \mathbb{Z}_{\max})$ sur \mathbb{B}
Faisceau structural \mathcal{O}_C	Faisceau structural \mathbb{Z}_{\max}
Galois sur $C(\overline{\mathbb{F}}_q)$	$\text{Gal}_{\mathbb{B}}(\mathbb{R}_+^{\max})$ sur $\mathcal{A}(\mathbb{R}_+^{\max})$
Ψ Correspondance de Frobenius	Correspondances $\Psi(\lambda)$ $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ sur $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$

Correspondances de Frobenius



Théorème

Soient $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\lambda\lambda' \notin \mathbb{Q}$. La composition des correspondances de Frobenius est donnée par

$$\Psi(\lambda) \circ \Psi(\lambda') = \Psi(\lambda\lambda')$$

Cela a lieu aussi si λ et λ' sont rationnels. Si λ, λ' sont irrationnels et $\lambda\lambda' \in \mathbb{Q}$,

$$\Psi(\lambda) \circ \Psi(\lambda') = \Psi(\lambda\lambda') \circ \text{Id}_\epsilon = \text{Id}_\epsilon \circ \Psi(\lambda\lambda')$$

où Id_ϵ est la déformation tangentielle.

Diviseurs et intersection

On peut exprimer le nombre d'intersection $D \bullet D'$ de deux diviseurs formels de la forme

$$D := \int h(\lambda) \Psi_\lambda d^* \lambda$$

par

$$D \bullet D' := \langle D \star \tilde{D}', \Delta \rangle$$

où \tilde{D}' est le transposé de D' et la composition $D \star \tilde{D}'$ est calculée par bilinéarité avec $\langle D \star \tilde{D}', \Delta \rangle$ obtenue en utilisant la distribution $N(u)$ et le fait que la correspondance Ψ_λ est de degré λ .

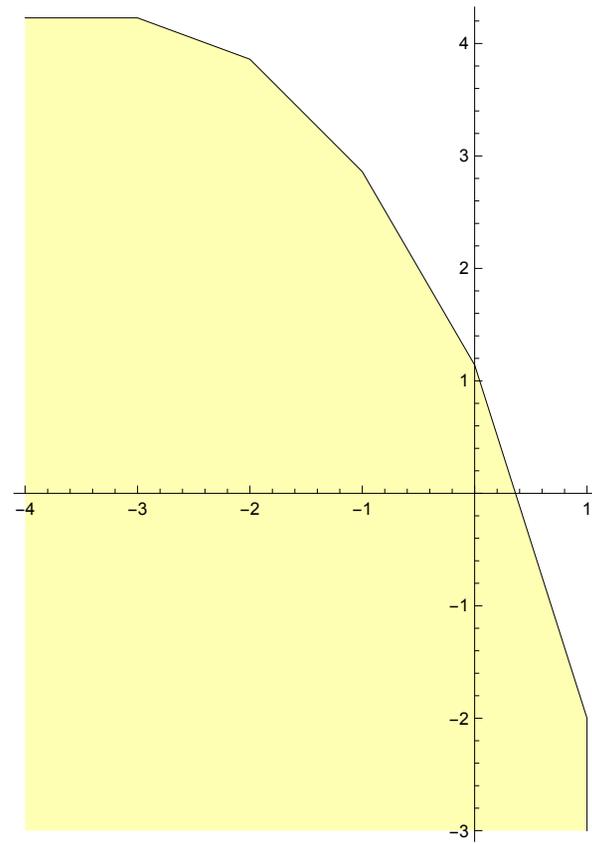
Négativité \iff RH

► Les correspondances horizontales et verticales ξ_j gardent un sens.

► La validité de RH est équivalente à l'inégalité

$$D \bullet D \leq 2(D \bullet \xi_1)(D \bullet \xi_2)$$

Il semble y avoir une incompatibilité entre \leq et la positivité naïve du nombre d'intersection, mais le lemme clef montre qu'il n'en est rien.



Extension des scalaires à \mathbb{R}_{\max}

Le convexe C est uniquement déterminé par

$$\ell_C(\lambda) := \inf\{u \in \mathbb{R} \mid C \subset P_{\lambda,u}\}$$

qui en terme des sommets (x_j, y_j) de C vaut

$$\ell_C(\lambda) = \max_j \lambda x_j + y_j.$$

On a $\ell_C(0) = \max y_j$ et

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \ell_C(\lambda)/\lambda = \max x_j = \inf\{v \in \mathbb{R} \mid C \subset P^v\}$$

Lemme

L'application $C \mapsto \ell_C, \ell_C(\lambda), \forall \lambda \in \mathbb{R}_+$ est un isomorphisme de $\mathbb{Z}_{\max} \hat{\otimes}_{\mathbb{B}} \mathbb{R}_{\max}$ avec le semi-anneau $\mathcal{R}(\mathbb{Z})$ des fonctions convexes continues affines par morceaux sur \mathbb{R}_+ de pentes entières ayant un nombre fini de discontinuités de la dérivée, muni des opérations ponctuelles des fonctions à valeurs dans \mathbb{R}_{\max} .

Points du topos $[0, \infty) \times \mathbb{N}^\times$

Théorème : Les points du topos $[0, \infty) \times \mathbb{N}^\times$ forment le quotient de l'espace des classes d'adèles de \mathbb{Q} par l'action de $\hat{\mathbb{Z}}^*$.

Corollaire : On a un isomorphisme canonique Θ entre les points du topos $[0, \infty) \times \mathbb{N}^\times$ et $\mathcal{A}(\mathbb{R}_+^{\max})$ i.e. les points du site arithmétique définis sur \mathbb{R}_+^{\max} .

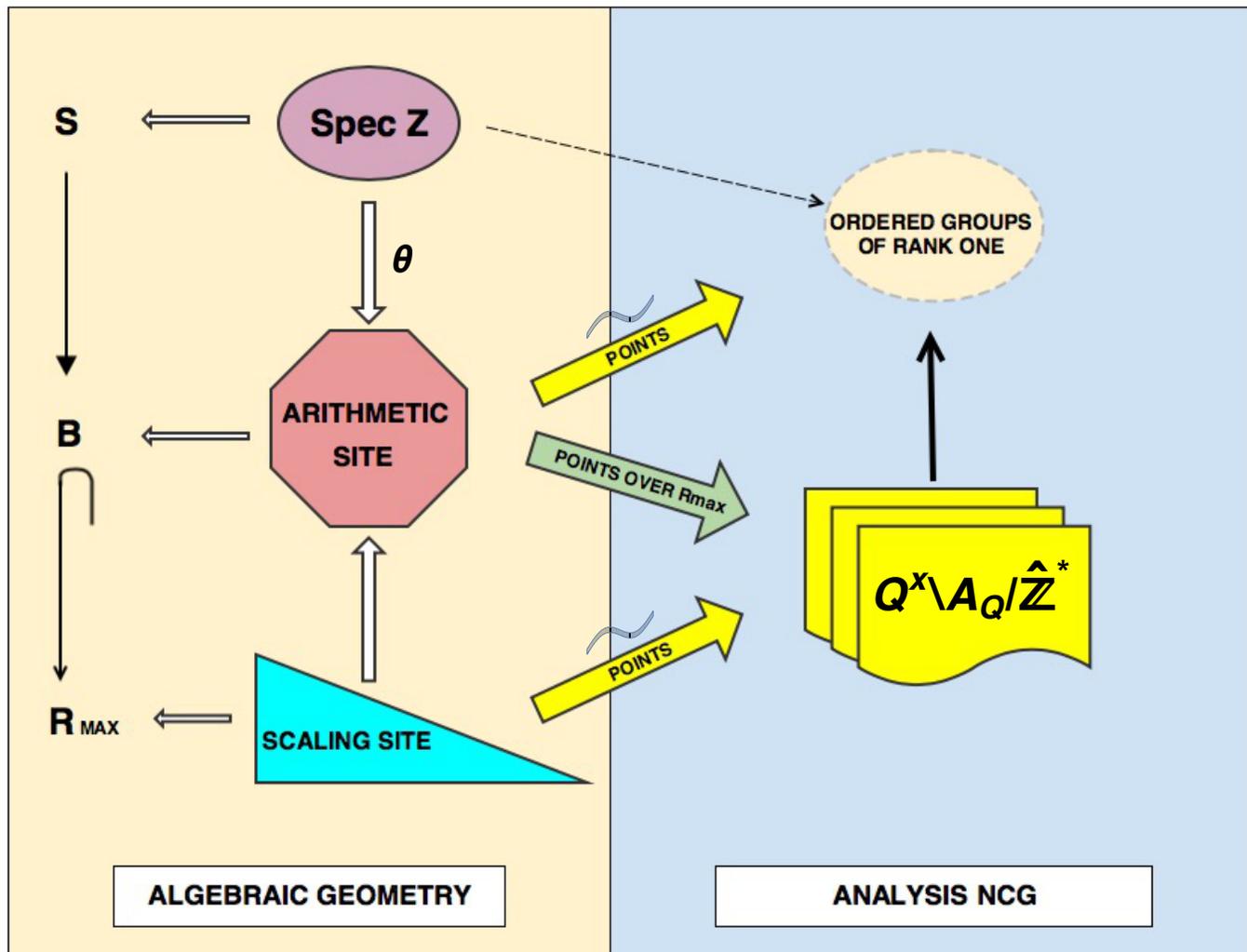
Faisceau structural de $[0, \infty) \times \mathbb{N}^\times$

C'est le faisceau sur $[0, \infty) \times \mathbb{N}^\times$ associé aux fonctions convexes affines par morceaux et de pentes entières. C'est le même que pour la localisation des zéros des fonctions analytiques, $f(X) = \sum a_n X^n$ dans l'anneau $A(r_1, r_2) = \{z \in K \mid r_1 < |z| < r_2\}$.

$$\tau(f)(x) := \max_n \{-nx - v(a_n)\}, \quad \forall x \in (-\log r_2, -\log r_1)$$

$$\tau(f)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{-x+i\theta})| d\theta.$$

$\bar{C} = C \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q$ <p style="text-align: center;">sur $\bar{\mathbb{F}}_q$</p>	<p style="text-align: center;">Site des fréquences</p> $\hat{\mathcal{A}} = ([0, \infty) \times \mathbb{N}^\times, \mathcal{O}) \text{ sur } \mathbb{R}_+^{\max}$
$C(\bar{\mathbb{F}}_q) = \bar{C}(\bar{\mathbb{F}}_q)$	$\mathcal{A}(\mathbb{R}_+^{\max}) = \hat{\mathcal{A}}(\mathbb{R}_+^{\max})$
<p>Faisceau structural</p> $\mathcal{O}_{\bar{C}} \text{ de } \bar{C}$ $= C \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q$	$\mathbb{Z}_{\max} \hat{\otimes}_{\mathbb{B}} \mathbb{R}_+^{\max} \rightarrow \text{Faisceau de}$ <p style="text-align: center;">fonctions convexes affines</p> <p style="text-align: center;">par morceaux, pentes $\in \mathbb{Z}$</p>
<p>Faisceau \mathcal{K} des fonctions rationnelles</p>	<p style="text-align: center;">Faisceau des fractions = fonctions continues affines</p> <p style="text-align: center;">par morceaux, pentes $\in \mathbb{Z}$</p>



Orbites périodiques

En restreignant le faisceau structural du site des fréquences \hat{A} aux orbites périodiques (*i.e.* à l'image de $\text{Spec } \mathbb{Z}$) on obtient un analogue réel $C_p = \mathbb{R}_+^* / p^{\mathbb{Z}}$, pour chaque nombre premier p , des courbes elliptiques de Jacobi $\mathbb{C}^* / q^{\mathbb{Z}}$.

<p>Courbe elliptique sur \mathbb{C}</p>	<p>Orbite périodique Courbe C_p sur \mathbb{R}_+^{\max}</p>
<p>Points sur \mathbb{C} : $\mathbb{C}^\times / q^{\mathbb{Z}}$</p>	<p>$\mathbb{R}_+^* / p^{\mathbb{Z}}$, $H \subset \mathbb{R}$, $H \sim H_p$</p>
<p>Faisceau structural fonctions périodiques $f(qz) = f(z)$</p>	<p>Faisceau de fonctions périodiques convexes affines par morceaux, pentés $\in H_p$</p>
<p>Faisceau \mathcal{K} des fonctions rationnelles $f(qz) = f(z)$</p>	<p>Faisceau des fonctions périodiques continues affines par morceaux, pentés $\in H_p$</p>

La condition sur les fonctions $f(H)$, $H \in \mathbb{R}$ qui définit le faisceau structural s'écrit en fonction des dérivées D_{\pm}

$$D_{\pm}(f)(H) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^{\pm}} \frac{f((1 + \epsilon)H) - f(H)}{\epsilon}$$

sous la forme

$$D_{\pm}(f)(H) \in H, \quad \forall H, \quad D_{+}(f)(H) \geq D_{-}(f)(H), \quad \forall H$$

Pour $H = \lambda H_p$, $f(H) = f(\lambda)$ cela donne

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^{\pm}} \frac{f((1 + \epsilon)\lambda) - f(\lambda)}{\epsilon} \in \lambda H_p \iff f'(\lambda)_{\pm} \in H_p$$

Fonctions rationnelles

Pour $W \subset C_p$ ouvert, $\mathcal{O}_p(W)$ est simplifiable, on note \mathcal{K}_p le faisceau associé au préfaisceau $W \mapsto \text{Frac } \mathcal{O}_p(W)$.

Lemme : Le faisceau des semi-corps de fractions est celui des fonctions continues affines par morceaux de pentes dans H_p munies du max (\vee) et de la somme.

$$(x - y) \vee (z - t) = ((x + t) \vee (y + z)) - (y + t).$$

Diviseurs de Cartier

Lemme : Le faisceau $\text{CDiv}(C_p)$ des diviseurs de Cartier *i.e.* le faisceau quotient $\mathcal{K}_p^\times / \mathcal{O}_p^\times$ du faisceau des anneaux de fractions par le groupe des unités du faisceau structural, est isomorphe au faisceau des diviseurs “naifs” $H \mapsto D(H) \in H$, tels que

$$\forall \lambda, \exists V \text{ ouvert } \lambda \in V, D(\mu) = 0, \forall \mu \in V, \mu \neq \lambda$$

On notera que \mathcal{K}_p n'est pas un faisceau constant.

Diviseurs

Définition : Un diviseur est une section globale du faisceau $\mathcal{K}_p^\times / \mathcal{O}_p^\times$, i.e. une application $H \rightarrow D(H) \in H$ nulle sauf en un nombre fini de points.

Proposition : (i) Les diviseurs $\text{Div}(C_p)$ forment un groupe abélien pour l'addition.

(ii) La condition $D'(H) \geq D(H)$, $\forall H \in C_p$, définit un ordre partiel sur le groupe $\text{Div}(C_p)$.

(iii) L'application suivante définit un morphisme compatible avec l'ordre

$$\text{deg}(D) := \sum D(H) \in \mathbb{R}.$$

Ordre d'une fonction en un point

Point \mathfrak{p}_H associé à $H \in \mathbb{R}$ et f section de \mathcal{K} en \mathfrak{p}_H .

$$\text{Ordre}(f) = h_+ - h_- \in H \subset \mathbb{R}$$

où $h_{\pm} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0_{\pm}} (f((1 + \epsilon)H) - f(H))/\epsilon$.

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{R}_+^* / p^{\mathbb{Z}}} \text{Ordre}_{\lambda}(f) = 0$$

Diviseurs principaux

Le faisceau \mathcal{K}_p a des sections globales, on note $\mathcal{K} = \mathcal{K}(C_p) = H^0(\mathbb{R}_+^*/p^{\mathbb{Z}}, \mathcal{K}_p)$ le semicorps des sections globales.

Diviseurs principaux : L'application qui à $f \in \mathcal{K}^\times$ associe le diviseur

$$(f) := \sum_H (H, \text{Ord}_H(f)) \in \text{Div}(C_p)$$

est un morphisme de groupes $\mathcal{K}^\times \rightarrow \text{Div}(C_p)$.

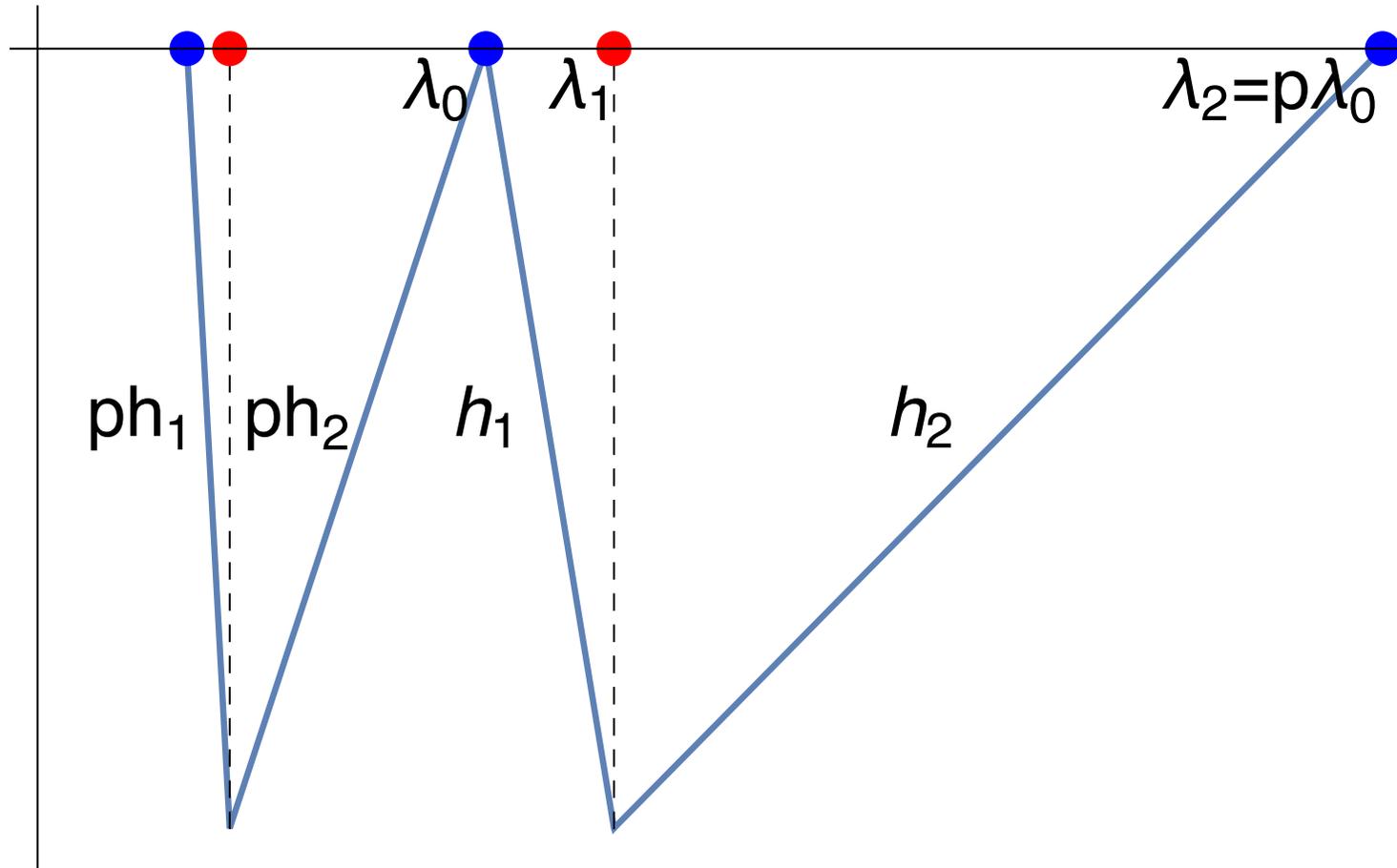
Définition : Un diviseur D est principal ssi il existe $f \in \mathcal{K}(C_p)^\times$ telle que $D = (f)$ où (f) est le diviseur donné par l'ordre de f .

$$\underline{\sum_H \text{Ord}_H(f) = 0}$$

On note $\mathcal{P} \subset \text{Div}$ le sous-groupe des diviseurs principaux.

Lemme : Le sous-groupe $\mathcal{P} \subset \text{Div}(C_p)$ des diviseurs principaux est contenu dans le noyau du morphisme $\text{deg} : \text{Div}(C_p) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\sum_H \text{Ord}_H(f) = 0, \forall f \in \mathcal{K}^\times.$$



Invariant χ

Pour $p > 2$ on considère l'idéal $(p - 1)H_p \subset H_p$.

$$0 \rightarrow (p - 1)H_p \rightarrow H_p \xrightarrow{r} \mathbb{Z}/(p - 1)\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Lemme : Pour $H \subset \mathbb{R}$, $H \simeq H_p$, l'application $\chi : H \rightarrow \mathbb{Z}/(p - 1)\mathbb{Z}$, $\chi(\mu) = r(\mu/\lambda)$ où $H = \lambda H_p$ ne dépend pas du choix de λ .

Avec $\chi(D) := \sum \chi(D(H))$ on a $\chi((f)) = 0$ pour tout diviseur principal.

Théorème

L'application (deg, χ) est un isomorphisme de groupes

$$(\text{deg}, \chi) : \text{Div}(C_p)/\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R} \times (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})$$

où \mathcal{P} est le sous-groupe des diviseurs principaux.

Fonctions Theta

J. Tate a montré comment les adapter au cas des corps non-archimédiens, la courbe elliptique est $\simeq K^\times / t\mathbb{Z}$.

$$\theta(w) = \sum_{\mathbb{Z}} (-1)^n t^{\frac{n^2-n}{2}} w^n =$$

$$(1-w) \prod_1^{\infty} (1-t^m)(1-t^m w)(1-t^m w^{-1})$$

Cas classique $K = \mathbb{C}$, Jacobi :

$$\vartheta_1(u, q) = i \sqrt[4]{q} e^{-iu} \theta(e^{2iu}, q^2)$$

Courbe $C_p = \mathbb{R}_+^* / p^{\mathbb{Z}}$

$$\prod_0^{\infty} (1 - t^m w) \rightarrow f_+(\lambda) := \sum_0^{\infty} (0 \vee (1 - p^m \lambda))$$

$$\prod_1^{\infty} (1 - t^m w^{-1}) \rightarrow f_-(\lambda) := \sum_1^{\infty} (0 \vee (p^{-m} \lambda - 1))$$

Lemme

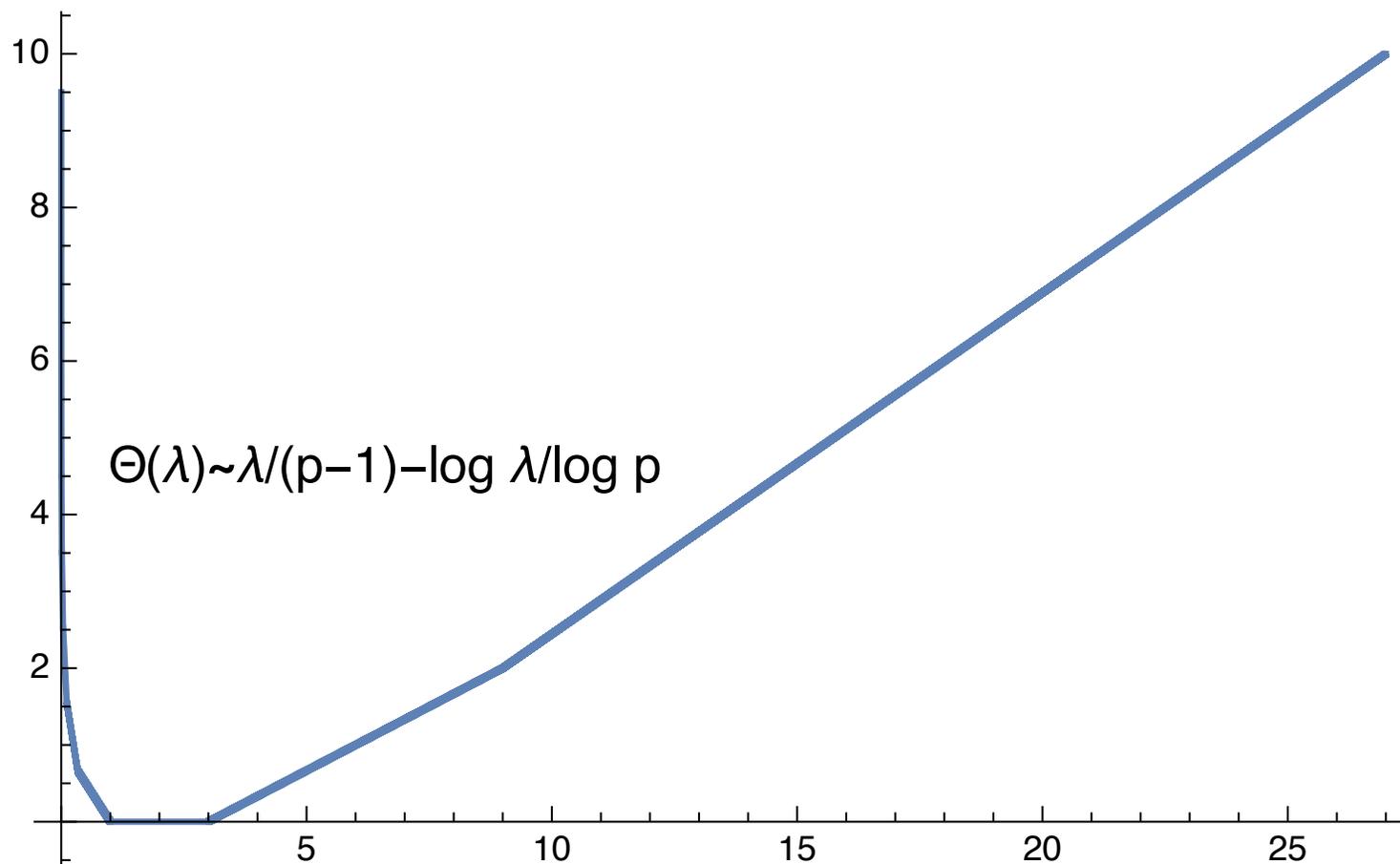
(i) Les fonctions $f_{\pm}(\lambda)$, $\lambda \in (0, \infty)$ vérifient

$$f_{+}(p\lambda) - f_{+}(\lambda) = -(0 \vee (1 - \lambda)),$$

$$f_{-}(p\lambda) - f_{-}(\lambda) = (0 \vee (\lambda - 1))$$

(ii) La fonction $\theta(\lambda) := f_{+}(\lambda) + f_{-}(\lambda)$, $\lambda \in (0, \infty)$, est convexe continue affine par morceaux, pentes dans H_p

$$\theta(p\lambda) = \theta(\lambda) + \lambda - 1, \quad \forall \lambda \in (0, \infty)$$



Fonctions $\Theta_{h,\mu}(\lambda)$

Soient $(h, \mu) \in H_p^+ \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\Theta_{h,\mu}(\lambda) := \mu \theta(\mu^{-1} h \lambda)$$

$$\Theta_{h,\mu}(p\lambda) = \Theta_{h,\mu}(\lambda) + h\lambda - \mu$$

$$\Theta_{ph,\mu}(\lambda) = \Theta_{h,\mu}(\lambda) + h\lambda - \mu$$

A tout couple $(h, \mu) \in H_p^+ \times \mathbb{R}_+^*$ on associe le diviseur

$$\delta(h, \mu) := (\mu h^{-1} H_p, \mu) \in \text{Div}(C_p).$$

Théorème

Toute $f \in \mathcal{K}(C_p)$ a une décomposition canonique

$$f(\lambda) = \sum_i \Theta_{h_i, \mu_i}(\lambda) - \sum_j \Theta_{h'_j, \mu'_j}(\lambda) - h\lambda + c$$

où $c \in \mathbb{R}$, $(p-1)h = \sum h_i - \sum h'_j$ et $h_i \leq \mu_i < ph_i$,
 $h'_j \leq \mu'_j < ph'_j$.

Riemann-Roch

Définition : Soit $D \in \text{Div}(C_p)$ on pose

$$H^0(D) := \{f \in \mathcal{K}(C_p) \mid D + (f) \geq 0\}$$

C'est un \mathbb{R}_{\max} -module, $f, g \in H^0(D) \Rightarrow f \vee g \in H^0(D)$.

Lemme : (i) Si $\deg(D) < 0$ on a $H^0(D) = \emptyset$.

(ii) Si $\deg(D) > 0$ on a $H^0(D) \neq \emptyset$.

(on ne compte pas $-\infty$ qui est toujours là)

$$\underline{H_p \text{ dense} \Rightarrow \dim H^0(D) = \infty}$$

Comme $H_p \subset \mathbb{R}$ est dense on a $\dim(H^0(D)) = \infty$ si $\deg(D) > 0$.

Mais H_p est discret dans l'inclusion :

$$H_p \subset \mathbb{Q}_p \times \mathbb{R}$$

Norme p -adique $\|f\|_p$

Définition : Soit $f \in \mathcal{K}(C_p)$. On pose

$$\|f\|_p := \max\{|h(\lambda)|_p/\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}_+^*\}$$

où $h(\lambda) \in H_p$ est la pente f en λ , et $|h(\lambda)|_p$ sa norme p -adique, normalisée par $|p|_p = 1/p$.

On a l'invariance de $|h(\lambda)|_p/\lambda$ par $\lambda \mapsto p\lambda$:

$$h(p\lambda) = \frac{1}{p} h(\lambda) \Rightarrow |h(p\lambda)|_p = p|h(\lambda)|_p$$

Proposition

Soient $f, g \in \mathcal{K}(C_p)$.

(i) On a $\|f \vee g\|_p \leq \max\{\|f\|_p, \|g\|_p\}$.

(ii) On a $\|f + g\|_p \leq \max\{\|f\|_p, \|g\|_p\}$.

(iii) On a $\|p^a f\|_p = p^{-a} \|f\|_p$.

(iv) On a $\|f\|_p \leq 1$ ssi la restriction de f à $[1, p]$ est à pentes entières.

(v) Soit $D \in \text{Div}(C_p)$ un diviseur, on définit une filtration de $H^0(D)$ par des \mathbb{R}_{\max} -sous-modules :

$$H^0(D)^\rho := \{f \in H^0(D) \mid \|f\|_p \leq \rho\}$$

Dimension topologique

C'est le nombre de paramètres réels dont dépendent les solutions :

Définition : Soit X un espace topologique. Sa *dimension topologique* $\dim_{\text{top}}(X)$ est le plus petit entier n tel que tout recouvrement ouvert \mathcal{U} de X admette un raffinement \mathcal{V} tel que tout point de X soit dans au plus $n + 1$ éléments de \mathcal{V} .

Dimension continue

Définition :

$$\text{Dim}_{\mathbb{R}}(H^0(D)) := \lim_{n \rightarrow \infty} p^{-n} \dim_{\text{top}}(H^0(D)^{p^n})$$

On doit démontrer l'existence de la limite.

Théorème

(i) Soit $D \in \text{Div}(C_p)$ un diviseur avec $\deg(D) \geq 0$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^{-n} \dim_{\text{top}}(H^0(D)^{p^n}) = \deg(D)$$

(ii) On a la formule de Riemann-Roch :

$$\dim_{\mathbb{R}}(H^0(D)) - \dim_{\mathbb{R}}(H^0(-D)) = \deg(D), \quad \forall D \in \text{Div}(C_p).$$

Références

A. Connes, C. Consani, *Schemes over \mathbb{F}_1 and zeta functions*, *Compositio Mathematica* 146 (6), (2010) 1383–1415.

A. Connes, C. Consani, *From monoids to hyperstructures : in search of an absolute arithmetic*, in Casimir Force, *Casimir Operators and the Riemann Hypothesis*, de Gruyter (2010), 147–198.

A. Connes, C. Consani, *Geometry of the Arithmetic Site*. *Adv. Math.* 291 (2016), 274–329.

A. Connes, C. Consani, *The scaling site*. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 354 (2016), no. 1, 1–6.